

# Eesti koolinoorte LIII täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA KOOLIVOOR

Tallinnas, 2. detsembril 2005. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

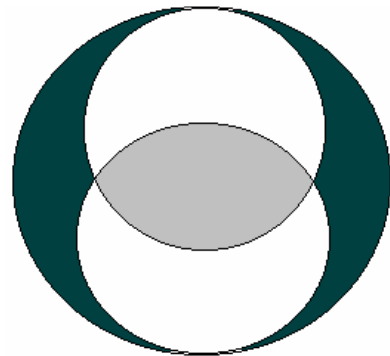
1. Lahenda võrrandite süsteem 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ x^2 + z^2 + xz = 28 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \end{cases}.$$

2. Kaks šotlasest venda otsustasid hakata tegelema lambakasvatusega. Nad müüsid oma ühise omandi - lehmakarja - ja jaotasid saadud raha eest ostetud lambad omavahel. Iga lehma eest saadi nii mitu kuldraha, kui palju oli algselt karjas lehmi, iga lamba hinnaks oli 10 kuldraha. Lõpuks jäi vendadel järele alla 10 kuldraha, millest piisas täpselt noore oina ostuks. Nüüd oli ostetud loomi paarisarv ning jaotamine lihtsam. Ilmselt pidi aga see šotlane, kes sai noore oina, saama teiselt vennalt kompensatsiooniks teatava summa. Kui suure summa ta pidi saama?

3. Tõesta, et  $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$ .

4. Joonisel kujutatud kaks väiksemat ringjoont on võrdse raadiusega, läbivad teineteise keskpunkte ja puutuvad suurt ringjoont seestpoolt. Leia joonisel tumedalt värvitud ja heledalt värvitud alade pindalade vahe, kui kõigi kolme ringjoone keskpunktid asuvad ühel sirgel ja suure ringjoone raadius on 1.

*Märkus. Osa aladest on värvimata.*



5. Tutvumisõhtul on iga inimene eelnevalt tuttav täpselt kolme inimesega. Leia kõik arvud N, mis saavad olla kõikide inimeste arvuks tutvumisõhtul.